ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Е. Ю. Овсий, А. С. Сердюк

Аннотация

We obtain an estimate of the deviation of de la Vallée Poussin sums $V_{n,\frac{n}{2}}(f;x)$ from continuous functions f, expressed in terms of values of theirs modulus of continuity. It is established that this estimate can't be improved by using the well-known analogue of the Lebesgue inequality for de la Vallée Poussin sums.

Получена оценка уклонений сумм Валле Пуссена $V_{n,\frac{n}{2}}(f;x)$ от непрерывных функций f, выражаемая через значения их модулей непрерывности. Установлено, что данную оценку нельзя улучшить путем использования известного аналога неравенства Лебега для сумм Валле Пуссена.

Обозначим через C пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, в котором норма определяется равенством $\|f\|_C = \max\limits_x |f(x)|$.

В роботах [1] и [2, с. 33–35] Валле Пуссеном были рассмотрены суммы

$$V_{n,p}(f;x) := \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x), \quad p,n \in \mathbb{N}, \quad p \leqslant n, \tag{1}$$

где $S_k(f;x)$ — частная сумма Фурье порядка k 2π-периодической функции $f(x)$. Им же было доказано, что

$$|f(x) - V_{n,p}(f;x)| \leqslant 2\frac{n}{p}E_{n-p}(f), \tag{2}$$

где

$$E_m(f) := \inf_{t_{m-1}} \|f(\cdot) - t_{m-1}(\cdot)\|_C$$

Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф35/001)

— наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами t_{m-1}, порядок которых не превышает $m-1$.

Впоследствии, суммы вида (1) получили название сумм Валле Пуссена. Как следует из (2), в случае, когда отношение $\frac{n}{p}$ ограничено, суммы Валле Пуссена дают наилучший порядок приближения для любой функции $f \in C$, удовлетворяющей условию $E_{n-p}(f) \leqslant KE_n(f)$.

При $p = n$ суммы Валле Пуссена совпадают с суммами Фейера

$$\sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x),$$

а при $p = 1$ — с суммами Фурье $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$.

Изучению аппроксимативных свойств сумм Валле Пуссена на различных функциональных классах посвящено значительное количество работ, с результатами которых можно ознакомиться, например, в работе [3].

На классах

$$H_\omega = \{f \in C: \quad |f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|), \quad x', x'' \in \mathbb{R}\},$$

где $\omega(\cdot)$ — заданный модуль непрерывности, точное значение величины

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,p}) := \sup_{f \in H_\omega} \|f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot)\|_C$$

при $p = n$ получено в [4, с. 222]. Для $p = \overline{1, n-1}$, $p \in \mathbb{N}$, наиболее общие результаты принадлежат А.В. Ефимову. В частности, в [5, с. 739] им доказано следующее соотношение:

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,p}) = A_{n,p}(\omega) + O(1)\omega(1/n), \tag{3}$$

где

$$A_{n,p}(\omega) = \begin{cases} \frac{e_n(\omega)}{\pi} \ln \frac{n-1}{p}, & 1 \leqslant p \leqslant \frac{n+1}{2}, \\ \frac{2}{\pi p} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt, & \frac{n+1}{2} \leqslant p \leqslant n-1, \end{cases}$$

а $e_n(\omega)$ — верхняя грань по классу H_ω n-го коэффициента Фурье. Из (3) следует, что при $p = \frac{n}{2}$

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,\frac{n}{2}}) \leqslant K\omega(1/n), \tag{4}$$

то есть суммы Валле Пуссена реализуют порядок наилучшего приближения на H_ω. О величине константы K в (4) можно судить на основании аналога неравенства Лебега для сумм Валле Пуссена (см., например, [6, с. 61])

$$|f(x) - V_{n,p}(f;x)| \leqslant \Big(\sup_{\|f\|_C \leqslant 1} \|V_{n,p}(f;\cdot)\|_C + 1\Big) E_{n-p}(f). \tag{5}$$

Как вытекает из работы [7],

$$\sup_{\|f\|_C \leqslant 1} \|V_{n,\frac{n}{2}}(f;\cdot)\|_C = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin \frac{3}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\right| dt = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Кроме того (см., например, [8, с. 261]), для любой функции $f \in C$ ($f \neq \mathrm{const}$) выполняется неравенство

$$E_m(f) < \omega\Big(f, \frac{\pi}{m}\Big), \quad m = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

а для любой функции $f \in C_*$, где C_* — подмножество функций f из C, у которых модуль непрерывности $\omega(f, t)$ является выпуклым вверх, — неравенство

$$E_m(f) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{m}\Big), \quad m = 1, 2, \dots. \tag{7}$$

В силу (5) и (6) для любой функции $f \in C$ при $p = \frac{n}{2}$ получаем

$$|f(x) - V_{n,\frac{n}{2}}(f;x)| < \Big(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\Big)\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big), \tag{8}$$

а в силу (5) и (7) для любой функции $f \in C_*$ будем иметь

$$|f(x) - V_{n,\frac{n}{2}}(f;x)| \leqslant \Big(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\Big)\omega\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big). \tag{9}$$

Если $f \in H_\omega$, то на основании (8) и (9) заключаем, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,\frac{n}{2}}) < \Big(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\Big)\omega\Big(\frac{2\pi}{n}\Big), \tag{10}$$

если $\omega(\cdot)$ — произвольный модуль непрерывности, и

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,\frac{n}{2}}) \leqslant \Big(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\Big)\omega\Big(\frac{2\pi}{n}\Big), \tag{11}$$

если $\omega(\cdot)$ — выпуклый модуль непрерывности. Возникает вопрос: являются ли оценки (8) и (9), а соответственно (10) и (11), неулучшаемыми? В дальнейшем будет показано, что в отношении (8), (10) и (11) это не так.

Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f \in C$. Тогда*

$$|f(x) - V_{n,\frac{n}{2}}(f;x)| < \omega\Big(f, \frac{6\pi}{7n}\Big) + \frac{9}{10\pi}\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + \frac{31}{25\pi}\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big). \tag{12}$$

Поскольку

$$\omega\Big(f, \frac{6\pi}{7n}\Big) + \frac{9}{10\pi}\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + \frac{31}{25\pi}\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big) < 1.6812\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big) <$$
$$< \Big(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\Big)\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big), \tag{13}$$

то очевидно, что оценка (12) уточняет (8).

Если $f \in H_\omega$, то из (12) получаем утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть $\omega(\cdot)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда*

$$\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,\frac{n}{2}}) < \omega\Big(\frac{6\pi}{7n}\Big) + \frac{9}{10\pi}\,\omega\Big(\frac{2\pi}{3n}\Big) + \frac{31}{25\pi}\,\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{14}$$

Учитывая (13), приходим к выводу, что (14) является более точной оценкой величины $\mathcal{E}(H_\omega; V_{n,\frac{n}{2}})$, чем (10). Заметим также, что в случае, когда H_ω является классом Гельдера H^α (т.е. $\omega(t) = t^\alpha$), оценка (14) уточняет (11) при всех $\alpha \in [0.38, 1]$.

Для класса H^α можно получить двухстороннюю оценку величины $\mathcal{E}(H^\alpha; V_{n,\frac{n}{2}})$. Для этого воспользуемся установленной в работе [9, с. 42] оценкой

$$\sup_{f\in H^\alpha} \|f(\cdot) - U_{n-1}(f;\cdot)\|_C \geqslant \frac{\pi^\alpha}{(1+\alpha)n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

в которой

$$U_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k,n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \tag{16}$$

$\lambda_{k,n}$ — произвольная заданная последовательность действительных чисел, а $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Поскольку суммы Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ допускают представление в виде (16), то из теоремы 1 и оценки (15) получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *При* $0 < \alpha \leqslant 1$ *имеет место двухсторонняя оценка*

$$\frac{1}{(\alpha+1)}\frac{\pi^\alpha}{n^\alpha} \leqslant \mathcal{E}(H^\alpha; V_{n,\frac{n}{2}}) < \left(\frac{6^\alpha}{7^\alpha} + \frac{3^{2-\alpha}2^{\alpha-1}}{5\pi} + \frac{31}{25\pi}\right)\frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}. \tag{17}$$

В частности, при $\alpha = 1$ из (17) получаем

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant \mathcal{E}(H^1; V_{n,\frac{n}{2}}) < \frac{1.443\pi}{n},$$

а при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \leqslant \mathcal{E}(H^{\frac{1}{2}}; V_{n,\frac{n}{2}}) < 1.555\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим уклонение

$$\rho_{n,p}(f;x) := f(x) - V_{n,p}(f;x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Поскольку для произвольной функции $f \in C$ и $p = \overline{1,n}$ имеет место представление

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{n}{\pi p}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) - f\left(x + \frac{t}{n}\right)\right)\frac{\cos\frac{n-p}{n}t - \cos t}{t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

(см., например, [5, с. 750]), то, полагая в (19) $p = \frac{n}{2}$, получаем

$$\rho_{n,\frac{n}{2}}(f;x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) - f\left(x + \frac{t}{n}\right)\right)\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos t}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(2f(x) - f\left(x + \frac{t}{n}\right) - f\left(x - \frac{t}{n}\right)\right)\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos t}{t^2}\,dt. \tag{20}$$

Покажем, что на каждом интервале (x_k, x_{k+1}), $k \in \mathbb{N}$, $x_k :=(2k-1)\pi$, функция

$$g(x) := 2\int\limits_x^\infty \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos t}{t^2}\,dt, \quad x > 0, \tag{21}$$

имеет, по крайней мере, один ноль. Интегрируя по частям, находим

$$g(x) = \frac{1}{2x}\Big(4\cos\frac{x}{2} + 2x\mathrm{Si}\Big(\frac{x}{2}\Big) - 4\cos x - 4x\mathrm{Si}(x) + \pi x\Big), \tag{22}$$

где $\mathrm{Si}(x)$ — интегральный синус, то есть функция вида

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

С учетом равенства

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt,$$

из (22) получаем

$$g(x) = 2\int\limits_{x/2}^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt - \int\limits_{x/2}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt. \tag{23}$$

Покажем, что

$$\Big|\int\limits_{x_k/2}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big| < 2\Big|\int\limits_{x_k/2}^{x_k} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big|, \quad x_k = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Легко видеть, что

$$\Big|\int\limits_{x_k/2}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big| < \Big|\int\limits_{x_k/2}^{x_k/2+\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big|. \tag{25}$$

Если $k = 1$, то очевидно, что

$$\Big|\int\limits_{x_k/2}^{x_k/2+\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big| < 2\Big|\int\limits_{x_k/2}^{x_k} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big| \tag{26}$$

и отсюда, с учетом (25), сразу следует (24).

Пусть $k \geqslant 2$. Поскольку

$$\mathrm{sign}\Big(\int\limits_{x_k/2}^{(x_k+\pi)/2} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\Big) = (-1)^k, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

и

$$\operatorname{sign}\Bigg(\int\limits_{(x_k+\pi)/2}^{x_k}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg)=\operatorname{sign}\Bigg(\int\limits_{k\pi}^{(2k-1)\pi}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg)=$$

$$=\operatorname{sign}\Bigg(\int\limits_{k\pi}^{(2k-1)\pi}\frac{\sin t}{t^3}\,dt\Bigg)=(-1)^k,\quad k=2,3,\dots,$$

то

$$2\Bigg|\int\limits_{x_k/2}^{x_k}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|>2\Bigg|\int\limits_{x_k/2}^{(x_k+\pi)/2}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|>\Bigg|\int\limits_{x_k/2}^{x_k/2+\pi}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|,\quad k=2,3,\dots \tag{27}$$

Объединяя (25) и (27) приходим к (24), из которого следует, что

$$\operatorname{sign}(g(x_k))=\operatorname{sign}\Bigg(2\int\limits_{x_k/2}^{x_k}\frac{\cos t}{t^2}\,dt-\int\limits_{x_k/2}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg)=$$

$$=\operatorname{sign}\Bigg(\int\limits_{x_k/2}^{x_k}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\Bigg)=(-1)^k,\quad x_k=(2k-1)\pi,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Обозначим через τ_k ноль функции $g(x)$ на интервале (x_{k-1},x_k), $x_k=(2k-1)\pi$, $k\in\mathbb{N}$, $x_0=0$. Тогда, используя обозначения

$$\tau_0=0,$$

$$\Delta(f;x;t/n):=2f(x)-f\Big(x+\frac{t}{n}\Big)-f\Big(x-\frac{t}{n}\Big),$$

из (20) получаем

$$|\rho_{n,\frac{n}{2}}(f;x)|=\frac{2}{\pi}\Bigg|\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\Delta(f;x;t/n)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|.$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos t}{t^2}\,dt=\frac{g(\tau_k)-g(\tau_{k+1})}{2}=0,$$

приходим к неравенству

$$|\rho_{n,\frac{n}{2}}(f;x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\Bigg(\Bigg|\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta(f;x;t/n)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|+$$

$$+\Bigg|\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\Big(\Delta(f;x;t/n)-\Delta(f;x;\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{2n})\Big)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos t}{t^2}\,dt\Bigg|\Bigg). \tag{29}$$

Учитывая, что для любой функции $f \in C$ выполняются неравенства:

$$|\Delta(f;x;t/n)| \leqslant 2\omega(f,t/n), \quad t>0$$

и

$$|\Delta(f;x;t_2/n)-\Delta(f;x;t_1/n)| \leqslant 2\omega\Big(f,\frac{|t_2-t_1|}{n}\Big), \quad t_1,t_2>0,$$

из (29) получаем

$$|\rho_{n,\frac{n}{2}}(f;x)| \leqslant \frac{4}{\pi}\Big(\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\omega(f,t/n)\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\omega\Big(f,\frac{|2t-\tau_k-\tau_{k+1}|}{2n}\Big)\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt\Big). \tag{30}$$

Вычисления, произведенные на ЭВМ, показывают, что для первых пяти нулей функции $g(x)$ справедливы следующие включения:

$$\tau_1 \in (2.657, 2.66), \tag{31}$$

$$\tau_2 \in (6.83, 6.84), \tag{32}$$

$$\tau_3 \in (14.16, 14.17), \tag{33}$$

$$\tau_4 \in (19.09, 19.10), \tag{34}$$

$$\tau_5 \in (26.41, 26.42). \tag{35}$$

Тогда, на основании (31) для первого интеграла в правой части (30) можем записать

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\omega(f,t/n)\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt \leqslant \omega(f,\tau_1/n)\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt <$$

$$<\omega\Big(f,\frac{2.66}{n}\Big)\int\limits_{0}^{2.66}\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt < 0.786\,\omega\Big(f,\frac{2.66}{n}\Big) <$$

$$< 0.786\,\omega\Big(f,\frac{6\pi}{7n}\Big). \tag{36}$$

Аналогичным образом, учитывая (32)–(35), находим

$$\sum_{k=1}^{4}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\omega\Big(f,\frac{|2t-\tau_k-\tau_{k+1}|}{2n}\Big)\frac{|\cos\frac{t}{2}-\cos t|}{t^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{4} \omega\Big(f, \frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{2n}\Big) \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{|\cos\frac{t}{2} - \cos t|}{t^2}\, dt <$$

$$< 0.225\,\omega\Big(f, \frac{2.0915}{n}\Big) + 0.057\,\omega\Big(f, \frac{3.67}{n}\Big) + 0.019\,\omega\Big(f, \frac{2.47}{n}\Big) +$$

$$+0.011\,\omega\Big(f, \frac{3.67}{n}\Big) < 0.225\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + 0.068\,\omega\Big(f, \frac{3.67}{n}\Big) + 0.019\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big). \qquad (37)$$

Поскольку

$$\omega\Big(f, \frac{3.67}{n}\Big) \leqslant \omega\Big(f, \frac{3.67-\pi}{n}\Big) + \omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big) < 2\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big),$$

то из (37) получаем

$$\sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \omega\Big(f, \frac{|2t-\tau_k-\tau_{k+1}|}{2n}\Big) \frac{|\cos\frac{t}{2} - \cos t|}{t^2}\, dt <$$

$$< 0.225\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + 0.155\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big). \qquad (38)$$

Далее, в силу того, что

$$\tau_{k+1} - \tau_k < x_{k+1} - x_{k-1} = 4\pi, \quad x_k = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

имеем

$$\sum_{k=5}^{\infty} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \omega\Big(f, \frac{|2t-\tau_k-\tau_{k+1}|}{2n}\Big) \frac{|\cos\frac{t}{2} - \cos t|}{t^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=5}^{\infty} \omega\Big(f, \frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{2n}\Big) \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{dt}{t^2} < 2\omega\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big) \int\limits_{\tau_5}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < 0.152\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big). \qquad (39)$$

Объединяя (30), (36), (38) и (39), приходим к оценке

$$|\rho_{n,\frac{n}{2}}(f;x)| < \frac{4}{\pi}\bigg(0.768\,\omega\Big(f, \frac{6\pi}{7n}\Big) + 0.225\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + 0.307\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)\bigg) <$$

$$< \omega\Big(f, \frac{6\pi}{7n}\Big) + \frac{9}{10\pi}\,\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3n}\Big) + \frac{31}{25\pi}\,\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (40)$$

откуда непосредственно следует справедливость теоремы 1.

1. *De La Vallée Poussin C.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. — 1918. — **166**, є 4. — P. 799—802.

2. *De La Vallée Poussin C.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. — Paris: Gauthier-Villars, 1919. — 152 p.

3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Працу ўн-ту математики НАН Укра»ни. — 2002. — **40**. — Ч. Iў. — 468 с.

4. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.

5. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена // Изв. АН СССР. — 1959. — **23**. — С. 737—770.

6. *Stečkin S.B.* On the approximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums // Anal. Math. — 1978. — **4**. — С. 61—74.

7. *Стечкин С.Б.* О суммах Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. — 1951. — **80**.— є 4. — С. 545—548.

8. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

9. *Корнейчук Н.П.* О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. — 1963. — **27**. — С. 29—44.

Contact information: Department of the Theory of Functions, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, 3, Tereshenkivska st., 01601, Kyiv, Ukraine

E-mail: ievgen.ovsii@gmail.com, serdyuk@imath.kiev.ua